

*Wapenen van schijven, platen en schalen
op basis van
elastische spanningsresultanten*

Prof.dr.ir. Johan Blaauwendraad

19 november 2019

Inhoud

0.	Inleiding.	2
1.	Notatie, tekenafpraak en transformatie.	4
	1.1 Schijven.	4
	1.2 Platen.	5
2.	Wapenen van schijven.	6
	2.1 Wapeningskrachten.	6
	2.2 Toets.	11
3.	Maximumdwarskracht in plaat.	12
4.	Wapenen van ligger met dwarskracht.	13
5.	Wapenen van platen.	16
	5.1 Normale momenten criterium.	16
	5.2 Wood-Armer momenten.	16
	5.3 Sandwich model van Marti.	17
	5.3.1 Geen dwarskrachtwapening nodig.	17
	5.3.2 Wel dwarskrachtwapening nodig.	18
6.	Wapenen van schalen.	21
	6.1 Geen dwarskrachtwapening nodig.	21
	6.2 Wel dwarskrachtwapening nodig.	22
	6.3 Opmerkingen bij het Marti-model.	22
	6.4 Sandwich model van Lourenço.	23
	6.4.1 Schaalbelasting	24
	6.4.2 Torsiebelasting	25
7.	Referenties	26

O. Inleiding

Voor het wapenen van schijven en platen bestaan methoden die gebaseerd zijn op plasticiteit. We kunnen denken aan de staafwerkmethode, de strippenmethode, vloeilijnenmethode en dergelijke. Het is een algemene overtuiging dat we daarmee economisch wapenen omdat we gebruik maken van herverdeling van spanningen. Maar veel van deze methoden worden toch weinig benut na de doorbraak van de Elementenmethode (EEM) waarmee de constructeur op snelle wijze oplossingen op basis van de elasticiteitsleer verkrijgt. De aantrekkelijkheid daarvan wordt nog vergroot doordat commerciële softwarebedrijven volgprogramma's aanbieden die in elk punt van de schijf of plaat uitrekenen welke wapening nodig is. Deze notitie bespreekt de methoden die een plaats hebben gekregen in Eurocode 2. Voor schijven geeft Eurocode 2 een aanbeveling in Bijlage LL. Voor platen en schalen laat Eurocode 2 in het midden welke methode de constructeur mag kiezen, maar deel 2 voor bruggen heeft een bijlage voor het wapenen van schaalementen waarin zowel schijf- als plaatkrachten optreden. We bespreken de achtergrond van deze wapeningsmethoden. Het zal blijken dat op lokaal elementniveau alsnog bezwijkanalytische overwegingen een rol spelen al zijn de krachten en momenten berekend met behulp van de elasticiteitsleer. Op lokaal niveau wordt gebruik gemaakt van herverdeling van spanningen, maar niet op globaal niveau.

Dat geen globale herverdeling van spanningen plaatsvindt betekent dat de methode beter past bij de gebruiksgrenstoestand dan bij de uiterste grenstoestand. Dat hoeft zeker geen bezwaar te zijn als voor constructies scheurwijdte- of doorbuigingseisen doorslaggevend zijn.

Computerprogramma's presenteren resultaten voor de wapeningsbehoefte doorgaans in de vorm van contourplots. Constructeurs moeten hiervan zelf een praktische wapening maken, rekening houdend met eisen voor minimumwapening.

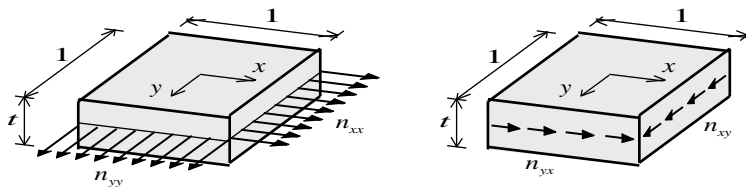
Omdat het in deze moduul van de Masterclass om inzicht gaat, zullen we van de te bespreken methoden de meest elementaire versie presenteren. Verfijningen en verbeteringen zullen we wel benoemen maar niet behandelen.

1. Notatie, tekenafpraak en transformatie

1.1 Schijven

De membraankrachten n_{xx} , n_{yy} , and n_{xy} zijn spanningsresultanten per eenheid van schijf-breedte, zie fig. 1.1. Ze hebben de dimensie van kracht per eenheid van lengte (N/m). De *notatie* voor de krachten is als volgt. We gebruiken voor iedere kracht twee indices. Met de eerste geven we het vlak aan waarop de kracht werkt. Het is de richting van de normaal op het vlak. De tweede index geeft de richting aan waarin de kracht werkt. Voorbeeld: n_{xy} werkt op een vlak met de normaal in de x -richting en werkt in de y -richting.

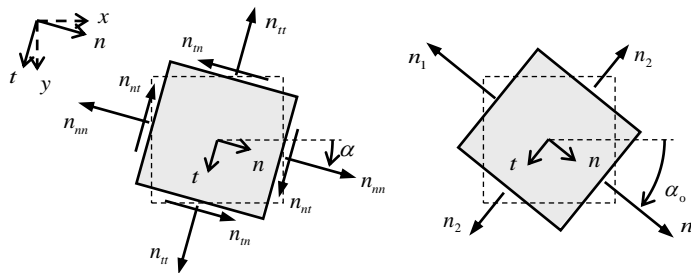
De tekenafpraak is als volgt. Een kracht is *positief* als deze werkt in de *positieve* coördinaatrichting op een vlak met de normaal in de *positieve* coördinaatrichting. Evenzo is een kracht *negatief* als deze werkt in de *negatieve* coördinaatrichting op een vlak met de normaal in de *negatieve* coördinaatrichting.



Figuur 1.1. Afspraak voor notaties en tekens in schijven.

Soms is het nuttig de krachten n_{nn} , n_{tt} and n_{nt} te gebruiken in de orthogonale richtingen n and t die een hoek α maken met de x -as en y -as (fig. 1.2). Met behulp van eenvoudige transformatieregels kunnen we zulke krachten berekenen als n_{xx} , n_{yy} en n_{xy} bekend zijn:

$$\begin{aligned} n_{nn} &= n_{xx} \cos^2 \alpha + n_{yy} \sin^2 \alpha + n_{xy} \sin 2\alpha \\ n_{tt} &= n_{xx} \sin^2 \alpha + n_{yy} \cos^2 \alpha - n_{xy} \sin 2\alpha \\ n_{nt} &= -\frac{1}{2}n_{xx} \sin 2\alpha + \frac{1}{2}n_{yy} \sin 2\alpha + n_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \tag{1.1}$$



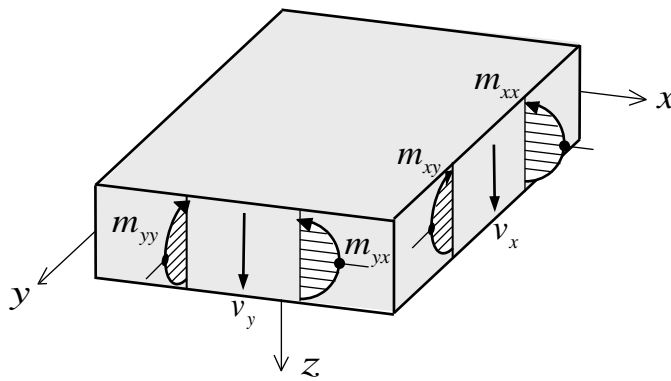
Figuur 1.2. Transformatie van schijfkrachten en hoofdrichtingen.

De hoek voor de hoofdrichting wordt berekend uit

$$\tan 2\alpha_o = \frac{2n_{xy}}{n_{xx} - n_{yy}} \quad (1.2)$$

1.2 Platen

Als we een plaat over de dikte in lagen verdeeld denken, heersen in elke laag vlakspanningen σ_{xx} , σ_{yy} and σ_{xy} . Integratie over de dikte leidt tot buigende momenten m_{xx} en m_{yy} en een wringend moment m_{xy} , zie figuur 1.3. Ze zijn positief als ze leiden tot een positieve spanning aan de positieve z -kant van het middenvlak. Daarnaast hebben we dwarskrachten in twee richtingen, v_x and v_y . Deze zijn positief als ze in de positieve z -richting wijzen op een snede met een positieve normaal.



Figuur 1.3. Afspraak voor notaties en tekens in platen.

Voor buigende momenten en het wringend moment gelden dezelfde transformatieregels als voor schijfkrachten (zie fig. 1.2). Voor nieuwe assen n, t waarvan de n -as een hoek α heeft met de x -as krijgen we:

$$\begin{aligned} m_{nn} &= m_{xx} \cos^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha + m_{yy} \sin^2 \alpha \\ m_{tt} &= m_{xx} \sin^2 \alpha - m_{xy} \sin 2\alpha + m_{yy} \cos^2 \alpha \\ m_{nt} &= -\frac{1}{2}(m_{xx} - m_{yy}) \sin 2\alpha + m_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (1.3)$$

De richting van n and t waarvoor m_{nt} nul is en m_{nn} en m_{tt} uiterste waarden aannemen, zijn hoofdrichtingen. De momenten m_{nn} en m_{tt} zijn dan *hoofdmomenten*. De richting α_o van de hoofdmomenten wordt bepaald door:

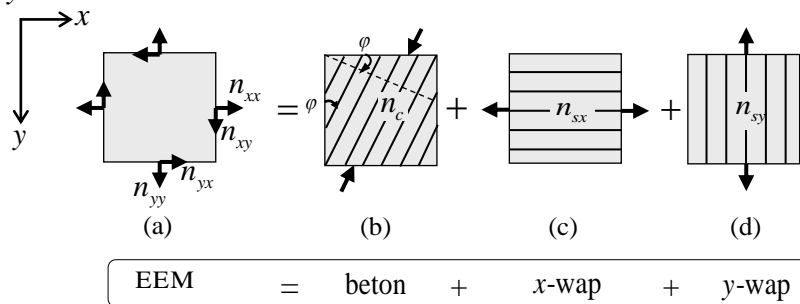
$$\tan 2\alpha_o = \frac{2m_{xy}}{m_{xx} - m_{yy}} \quad (1.4)$$

2 Wapenen van schijven

2.1 Wapeningskrachten

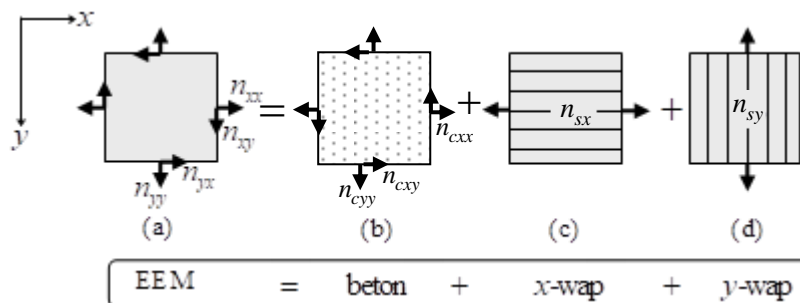
We gaan uit van een praktisch orthogonaal wapeningsnet waarvan de richtingen samenvallen met assen x en y en beschouwen in het x - y vlak een schijfvormig element met de schijfkrachten per eenheid van breedte n_{xx} , n_{yy} en n_{xy} die volgen uit een EEM-berekening, zie figuur 2.1a. De schuifkracht n_{xy} is gelijk aan n_{yx} . Zoals ze zijn getekend hebben de schijfkrachten een positief teken. De spanningstoestand ligt vast met deze drie onafhankelijke schijfkrachten n_{xx} , n_{yy} en n_{xy} .

We kunnen deze EEM-spanningstoestand ook op een andere manier vastleggen, namelijk met drie lijnspanningstoestanden als getekend in de figuren 2.1b, 2.1c en 2.1d. We onderscheiden een trekkracht n_{sx} in de wapening die in x -richting loopt, een wapeningskracht n_{sy} in y -richting en een drukkracht n_c in de beton. De index s staat voor steel en c voor concrete. Figuur 2.1b geeft de krachten n_c in de betondrukstaven, figuur 2.1c de wapeningskrachten n_{sx} en figuur 2.1d de wapeningskrachten n_{sy} . De kracht n_c per eenheid van breedte noemen we positief als deze druk is. Ook de wapeningskrachten n_{sx} en n_{sy} zijn gedefinieerd per eenheid van breedte, nu positief voor trek. Loodrecht op de drukstaven treedt in de beton geen kracht op en tussen de drukstaven geen schuifkracht. De hoek tussen de normaal op de drukstaven en de x -as noemen we φ . Dat is ook de hoek tussen de drukstaven en de y -as.



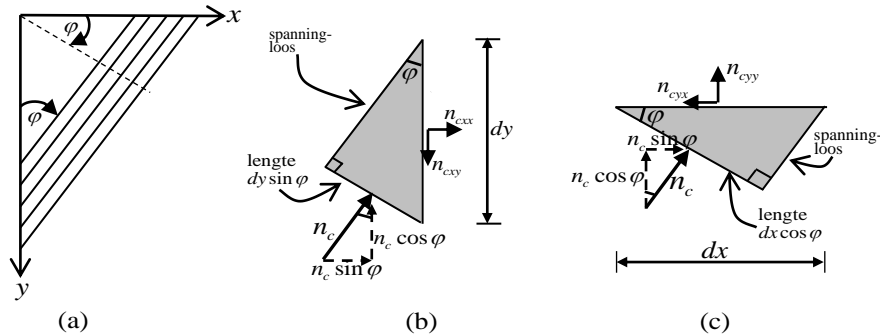
Figuur 2.1a. Ontbinden van EEM-spanningen in drie lijnspanningstoestanden.

We zullen de drie lijnspanningstoestanden bepalen. Om ze te kunnen sommeren, ontbinden we de betonlijnspanningstoestand n_c in drie schijfspanningen n_{cxx} , n_{cyy} en n_{cxy} die corresponderen met de x - en y -as, zie figuur 2.1b.



Figuur 2.1b. Vervangen van lijnspanning n_c door equivalente n_{cxx} , n_{cyy} en n_{cxy} .

We bepalen n_{cxx} , n_{cyy} en n_{cxy} aan de hand van figuur 2.2.



Figuur 2.2. Bepaling van relatie tussen n_c en equivalente schijfkrachten n_{cxx} , n_{cyy} en n_{cxy} .

Figuur 2.2a is een schematische voorstelling van de scheuren. In figuur 2.2b hebben we een driehoekje getekend met één zijde evenwijdig aan de betondrukstaven, één loodrecht daarop en één in de y -richting. De evenwijdige rand is spanningsloos, in de rand loodrecht daarop werkt de betondrukkracht n_c en in de verticale rand de schijfkrachten n_{cxx} en n_{cxy} . De lengte van de verticale rand noemen we dy ; de lengte van de andere randen volgt daaruit. Voor dit driehoekje formuleren we de evenwichtsvergelijkingen in de x - en de y -richting, waartoe we de betondrukkracht n_c ontbinden in die twee richtingen. De twee evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} +n_c \sin \varphi (dy \sin \varphi) + n_{cxx} dy &= 0 \\ -n_c \cos \varphi (dy \sin \varphi) + n_{cxy} dy &= 0 \end{aligned}$$

Eliminatie van dy en herordenen leidt tot:

$$\begin{aligned} n_{cxx} &= -n_c \sin^2 \varphi \\ n_{cxy} &= n_c \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.1a)$$

We herhalen dit voor het driehoekje in figuur 2.2c, met een zijde in de x -richting. Op deze zijde werken de schijfkrachten n_{cyy} en n_{cyx} . Deze schuifkracht is gelijk aan n_{cxy} . Nu worden de evenwichtsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} +n_c \cos \varphi (dx \cos \varphi) + n_{cyy} dx &= 0 \\ -n_c \sin \varphi (dx \cos \varphi) + n_{cyx} dx &= 0 \end{aligned}$$

Na elimineren van dx en herordenen vinden we:

$$\begin{aligned} n_{cyy} &= -n_c \cos^2 \varphi \\ n_{cyx} &= n_c \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.1b)$$

Het resultaat van de vergelijkingen (2.1a) en (2.1b) laat zich samenvatten tot

$$\begin{aligned} n_{cxx} &= -n_c \sin^2 \varphi \\ n_{cyy} &= -n_c \cos^2 \varphi \\ n_{cxy} &= n_c \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nu kunnen we de drie spanningstoestanden (b), (c) en (d) van Figuur 2.1b gemakkelijk sommeren, wat de relatie levert tussen de drie EEM-schijfkrachten n_{xx} , n_{yy} en n_{xy} en de drie lijnspanningstoestanden van Figuur 2.1a:

$$\begin{aligned} n_{sx} &= n_{xx} - n_c \sin^2 \varphi \\ n_{sy} &= n_{yy} - n_c \cos^2 \varphi \\ n_{xy} &= n_c \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vervolgens lossen we de gezochte drie lijnspanningstoestanden hieruit op:

$$\begin{aligned} n_{sx} &= n_{xx} + n_{xy} \tan \varphi \\ n_{sy} &= n_{yy} + n_{xy} \cot \varphi \\ n_c &= n_{xy} (\sin \varphi \cos \varphi)^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

In de literatuur wordt de letter k ingevoerd voor $\tan \varphi$:

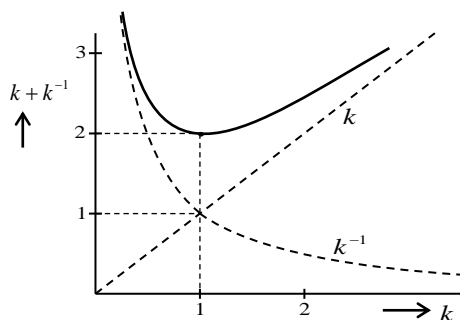
$$k = \tan \varphi \quad (2.5)$$

Dan geldt $\sin \varphi = k/\sqrt{k^2+1}$ en $\cos \varphi = 1/\sqrt{k^2+1}$. Daarmee gaat vergelijking (2.4) over in:

$$\begin{aligned} n_{sx} &= n_{xx} + k n_{xy} \\ n_{sy} &= n_{yy} + k^{-1} n_{xy} \\ n_c &= (k + k^{-1}) n_{xy} \end{aligned} \quad (2.6)$$

De grootte van de wapeningskrachten n_{sx} en n_{sy} en dus de hoeveelheid wapening hangt af van de hoek φ . Tot hier hebben we stilzwijgend gewerkt alsof deze bekend is. In werkelijkheid is dit niet zo. In een concept waarin krachten mogen herverdelen kunnen we de hoek (en dus k) zo kiezen dat de hoeveelheid wapening minimaal wordt. De som van de eerste twee vergelijkingen geeft hiervoor een maat:

$$n_{sx} + n_{sy} = n_{xx} + n_{yy} + n_{xy} (k + k^{-1}) \quad (2.7)$$



Figuur 2.3. Minimum van $k + k^{-1}$.

In deze vergelijking is k nog onbekend. Dat biedt een mogelijkheid om de hoeveelheid wapening te optimaliseren. De term tussen haken is minimaal voor $k = 1$, zie figuur 2.3, dus voor een hoek $\varphi = 45$ graden. Het eindresultaat is dan volgens (2.5):

$$\begin{aligned} n_{sx} &= n_{xx} + n_{xy} \\ n_{sy} &= n_{yy} + n_{xy} \end{aligned} \quad (2.8)$$

en de kracht in de betondiagonalen wordt:

$$n_c = 2n_{xy} \text{ (met } n_c > 0 \text{ bij druk).} \quad (2.9)$$

Om de wapening te vinden moeten we de schuifkracht zowel in de x - als y -richting optellen bij de aanwezige krachten n_{xx} en n_{yy} . Bij het minimaliseren van de wapeningshoeveelheid gingen we er stilzwijgend van uit dat n_{xy} positief is. Bij een negatieve schuifkracht vinden we $k = -1$ en wordt $\varphi = -45$ graden. De betondrukstaven lopen dan juist in de andere richting. We kunnen de situatie voor positieve en negatieve schuifspanningen in één formule vangen door de absolute waarde van de schuifspanningen te hanteren:

$$\begin{aligned} n_{sx} &= n_{xx} + |n_{xy}| \\ n_{sy} &= n_{yy} + |n_{xy}| \end{aligned} \quad (2.10)$$

en de kracht in de drukstaven wordt

$$n_c = 2|n_{xy}| \quad (2.11)$$

Als we niet $k = 1$ kiezen, maar die vrij willen houden, worden (2.10) en (2.11):

$$\begin{aligned} n_{sx} &= n_{xx} + k |n_{xy}| \\ n_{sy} &= n_{yy} + k^{-1} |n_{xy}| \\ n_c &= (k + k^{-1}) |n_{xy}| \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tot hier zijn we er stilzwijgend van uitgegaan dat in beide richtingen wapening nodig is. Als voor n_{sx} een negatieve waarde wordt berekend, is geen wapening in die richting nodig. Dit is het geval als n_{xx} negatief is en in absolute waarde groter dan n_{xy} . Wapening ligt nu alleen in y -richting. We werken dan niet meer met de hoek van 45 graden, maar laten de grootte k volgen uit de conditie $n_{sx} = 0$ voor de eerste vergelijking in (2.12):

$$k = -n_{xx} / |n_{xy}| \quad (2.13)$$

De waarde van k is nu groter dan 1. De tweede vergelijking in (2.12) geeft dan voor de wapening in y -richting de gereduceerde waarde:

$$n_{sy} = n_{yy} + k^{-1} |n_{xy}| = n_{yy} - \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}} \quad (2.14)$$

Omdat k nu groter is dan 1 geldt voor de kracht in de betondrukstaven: $n_c > 2n_{xy}$.

Als n_{sy} negatief wordt, is er alleen wapening in x -richting en wordt de conditie $n_{sy} = 0$:

$$k = -n_{yy} / n_{xy} \quad (2.15)$$

De wapeningskracht in x -richting wordt:

$$n_{sx} = n_{xx} - \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}} \quad (2.16)$$

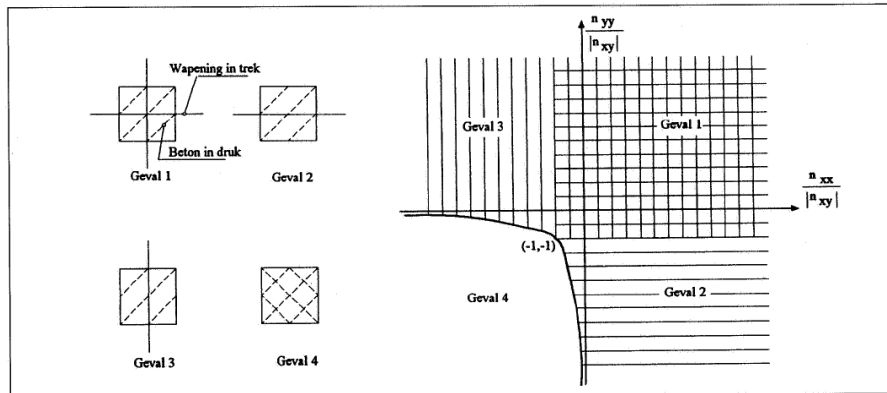
en weer wordt $n_c > 2n_{xy}$.

We hebben nu drie situaties behandeld, wapening in twee richtingen, wapening alleen in de y -richting en wapening alleen in de x -richting. Er is nog een vierde situatie mogelijk. Bij wapening in één richting kan ook die wapening niet meer nodig blijken. De voorwaarde daarvoor is dat n_{sy} in (2.14) of n_{sx} in (2.16) negatief wordt. Beide condities leveren hetzelfde resultaat:

$$n_{xx}n_{yy} - n_{xy}^2 \leq 0 \quad (2.17)$$

De schijf is dan volledig ongescheurd en de grootste drukkracht in de beton volgt op de klassieke wijze uit de cirkel van Mohr:

$$n_c = \left| \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) - \sqrt{\frac{1}{4}(n_{xx} - n_{yy})^2 + n_{xy}^2} \right| > 0 \quad (2.18)$$



Figuur 2.4 Vier kwadranten met de wapeningsconfiguratie en uitdrukkingen voor de benodigde wapening en betondrukspanning. Ontleend aan [4].

De vier wapeningregimes kunnen fraai worden samengevat in de grafiek die is afgebeeld in figuur 2.4. De schuifkrachten zijn genormeerd. Op de assen staan de dimensieloze grootheden $n_{xx}/|n_{xy}|$ en $n_{yy}/|n_{xy}|$. Het kwadrant rechtsboven geldt voor wapening in twee richtingen. Afhankelijk van de grootte van de genormeerde spanningen wordt scheurvorming onder een hoek $\varphi = \pi/4$ of $\varphi = -\pi/4$ verondersteld op te treden.

Het kwadrant linksboven geldt voor alleen wapening in y -richting en het kwadrant rechtsonder voor alleen wapening in x -richting. De lijnen $n_{xx}/|n_{xy}| = -1$ en $n_{yy}/|n_{xy}| = -1$ vormen de overgangen tussen de kwadranten. In het vierde kwadrant wordt de overgang gemarkeerd door de hyperbool en het gebied daar linksonder

$$\frac{n_{xx}}{|n_{xy}|} \cdot \frac{n_{yy}}{|n_{xy}|} \leq 1 \quad (2.19)$$

Deze vergelijking is een andere schrijfwijze van (2.16).

In tabelvorm is de samenvatting van de vier regimes, ontleend aan [4]:

geval	voorwaarden	n_{sx}	n_{sy}	n_b
1 wapening noodzakelijk in beide richtingen	$n_{xx} \geq - n_{xy} $ $n_{yy} \geq - n_{xy} $	$n_{xx} + n_{xy} $	$n_{yy} + n_{xy} $	$-2 n_{xy} $
2 alleen wapening in de x-richting noodzakelijk	$n_{xx} \geq \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}$ $n_{yy} < - n_{xy} $	$n_{xx} - \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}$		$n_{yy} + \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}$
3 alleen wapening in de y-richting noodzakelijk	$n_{xx} < - n_{xy} $ $n_{yy} \geq \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}$		$n_{yy} - \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}$	$n_{xx} + \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}$
4 geen wapening noodzakelijk; twee-assige druk	$\begin{cases} n_{xx} < \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}} \\ n_{yy} < - n_{xy} \end{cases}$ of $\begin{cases} n_{xx} < - n_{xy} \\ n_{yy} < \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}} \end{cases}$			$\frac{n_{xx} + n_{yy}}{2}$ $-\sqrt{\left(\frac{n_{xx} - n_{yy}}{2}\right)^2 + n_{xy}^2}$

Let op:

De tekenafspraken voor n_b in deze tabel is afwijkend van de afspraak in de tekst. In de tabel is n_b negatief bij druk.

Opmerking 1

De gevallen 2 en 3 kunnen ook anders worden gepresenteerd:

$$\text{Geval 2: } n_{yy} + |n_{xy}| < 0; \quad n_{sx} = n_{xx} + k|n_{xy}|; \quad n_{sy} = 0; \quad n_c = |n_{xy}|(k + k^{-1}); \quad k = \frac{|n_{xy}|}{-n_{yy}}$$

$$\text{Geval 3: } n_{xx} + |n_{xy}| < 0; \quad n_{sx} = 0; \quad n_{sy} = n_{yy} + k^{-1}|n_{xy}|; \quad n_c = |n_{xy}|(k + k^{-1}); \quad k = \frac{n_{xx}}{-|n_{xy}|}$$

Opmerking 2

Wie gebruik maakt van de mogelijkheid om zo economisch te wapenen wordt aanbevolen om de k -waarde niet al te zeer te laten afwijken van 1. De aanbeveling luidt:

$$1 \leq k \leq 2 \tag{2.20}$$

In de praktijk van elke dag wordt het onderscheid tussen de vier regimes niet altijd gemaakt. Wie in twee richtingen wapening uitrekent (dus altijd werkt met $k = 1$) en in één richting de ‘negatieve’ wapening weglaat, zal in de andere richting een te grote wapening uitrekennen en is dus niet economisch bezig. Omdat toch altijd een praktische wapening moet worden gekozen hoeft het verschil niet groot te zijn.

2.2 Toets

De berekende wapeningskrachten n_{sx} en n_{sy} moeten kleiner zijn dan de opneembare vloei-kracht n_{sd} . Deze toets is eenduidig. De berekenden drukkracht n_c in de beton toetsen we aan de opneembare drukkracht n_{cd} . Voor de gevallen 1, 2 en 3 kunnen we de volgende formule gebruiken:

$$n_{cd} = f_{cd} d = 0,60 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} d \tag{2.21}$$

en voor geval 4:

$$n_{cd} = f_{cd} d = K \cdot 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} d \tag{2.22}$$

Bij de gevallen 1, 2 en 3 kruist de drukdiagonaal wapeningstaven onder trek waardoor de druksterkte afneemt. Bij geval 4 is de beton alzijdig onder druk. Dan hoeft de druksterkte niet gereduceerd te worden. Hij mag zelfs worden vergroot met een factor K , afhankelijk van de verhouding van de hoofddrukspanningen ($|\sigma_2| < |\sigma_1|$):

$$K = \frac{1+3,65\alpha}{(1+\alpha)^2}; \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{2.23}$$

De laagste waarde $K=1$ treedt op bij $\sigma_2 = 0$ en de grootste waarde $K=1,254$ bij $\sigma_2 = 0,52 \sigma_1$.

3. Maximum dwarskracht in een plaat

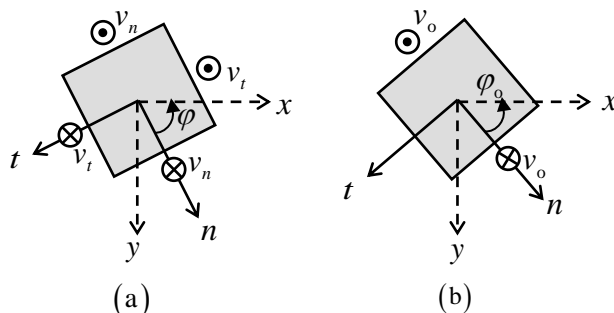
In liggers geldt de regel dat de dwarskracht V de afgeleide is van het moment M . Voor platen bestaat een vergelijkbare relatie. Daarvoor definiëren we het moment m :

$$m = \frac{m_{xx} + m_{yy}}{1 + \nu} \quad (3.1)$$

Dan kunnen we schrijven:

$$v_x = \frac{\partial m}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial m}{\partial y} \quad (3.2)$$

Hieruit laten zich dwarskrachten v_n en v_t afleiden voor elke willekeurige richting n en t loodrecht op elkaar, zie figuur 3.1.



Figuur 3.1. (a) Dwarskrachten v_n en v_t . (b) In de richting φ_0 is de dwarskracht v_0 maximaal.

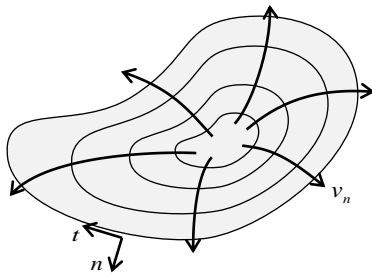
Er is een richting n waarvoor de dwarskracht v_n maximaal wordt en de dwarskracht v_t nul is. Die n -as maakt een hoek φ_0 met de x -as. De grootte van de hoek berekenen we met

$$\tan \varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.3)$$

en de grootte van de maximale dwarskracht v_0 uit

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.4)$$

Bij de dwarskrachten hoort de 'regenbui-analogie', zie figuur 3.2. Als we voor de moment-functie m hoogtelijnen tekenen, loopt de maximale dwarskracht v_0 loodrecht op de hoogtelijnen en is er geen dwarskracht in de richting van de hoogtelijnen.

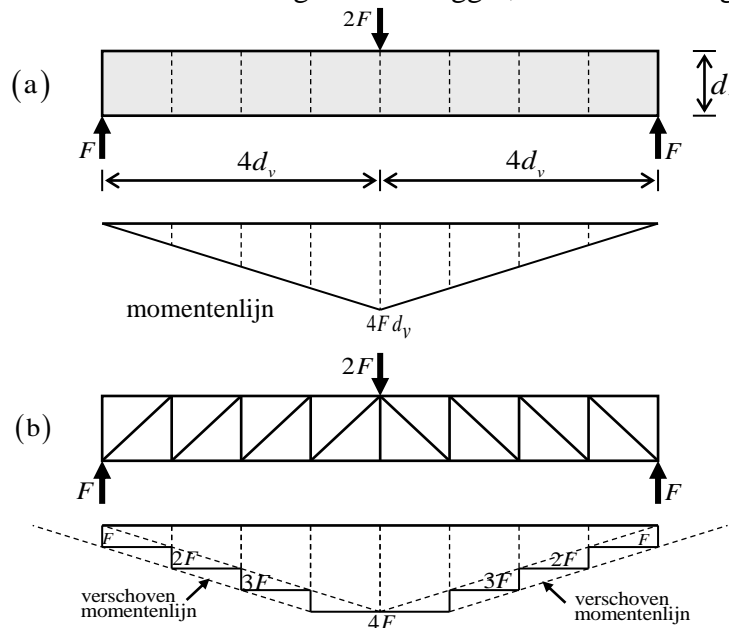


Figuur 3.2. De maximale dwarskracht staat loodrecht op de hoogtelijnen van de m -heuvel.

4. Wapenen van ligger met dwarskracht

In figuur 4.1a schetsen we een vrij-opgelegde ligger onder een puntlast $2F$ in het midden. De schuifspanning blijft zo klein dat geen dwarskrachtwapening nodig is. We noemen de lijn door het zwaartepunt van de drukzones de druklijn. De afstand van de wapening tot de druklijn is d_v . De lengte van de ligger is $8d_v$. Het moment in het midden van de ligger is dan $4Fd_v$, zie figuur 4.1a.

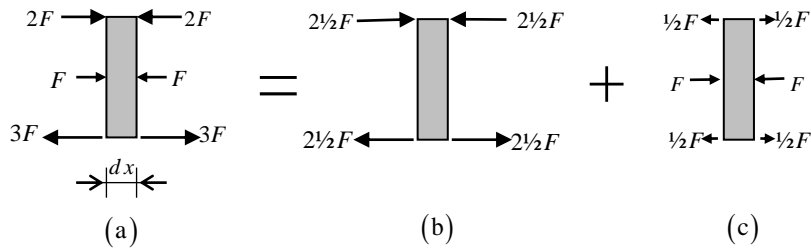
In figuur 4.1b beschouwen we de situatie dat wél dwarskrachtwapening nodig is. Nu vatten we de ligger op als een vakwerk van twee keer vier velden met drukdiagonalen onder 45 graden. In dit geval verloopt de kracht in de druklijn stapsgewijs van nul bij de oplegging tot $-3F$ nabij het midden. De trekkracht in de wapening neemt stapsgewijs toe van F bij de oplegging tot $4F$ in het midden. De lijn die de grootste trekwaarden verbindt, loopt evenwijdig aan de T -lijn van figuur 4.1a, maar over de afstand d_v naar links verschoven. Elke constructeur kent dit fenomeen van de regel dat we de momentenlijn moeten verschuiven over de effectieve hoogte van de ligger, en dan in de ongunstige richting.



Figuur 4.1. (a) Kracht T in wapening voor ongescheurd lijf. (b) Bij gescheurd lijf (vakwerkmodel).

We zien nu de situatie halverwege een veld, bijvoorbeeld het derde veld. In figuur 4.1b is de drukkracht $-2F$ en de trekkracht $3F$. Er is toch horizontaal evenwicht in de snede omdat er ook een horizontale ontbondene van de diagonaal is ter grootte van $-F$.

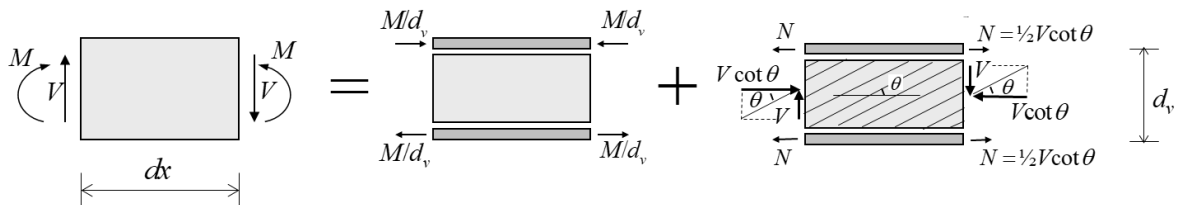
Figuur 4.2 laat zien dat het krachtensysteem halverwege het derde veld (a) kan worden ontbonden in twee systemen (b) en (c). We tonen een stukje ligger met een hoogte d_v en lengte dx . Systeem (b) komt overeen met de momentenlijn van figuur 4.1a. Systeem (c) is een extra dat hierop moet worden gesuperponeerd. Dit systeem ontstaat na scheurvorming in het lijf van de ligger waardoor drukdiagonalen tot ontwikkeling komen.



Figuur 4.2. Splitten in twee delen van de snedekrachten halverwege een veld.

Door systeem (c) wordt de drukkracht in de druklijn $\frac{1}{2}F$ kleiner en de trekkracht in de wapening $\frac{1}{2}F$ groter. We zullen een vergelijkbaar fenomeen zien bij het wapenen van platen in hoofdstuk 5.

Het beschouwen van een ligger als vakwerk zoals in figuur 4.1b is een grove manier van schematiseren. In werkelijkheid zal een fijner systeem van scheuren optreden en zijn er veel meer drukdiagonalen. We tekenen dat in figuur 4.3 in een liggermootje met lengte dx . In het mootje heerst een dwarskracht V en buigend moment M . In de eerste figuur na het gelijkteken wordt aangegeven hoe het moment M wordt opgenomen. We hebben het liggermootje gesplitst in drie componenten, een horizontale drukstaaf aan de bovenkant, een horizontale trekstaaf aan de onderkant en een tussenliggend lijf. De afstand tussen de druk- en trekstaaf is d_v . In de figuur zijn de drie componenten in verticale richting uit elkaar geschoven. Het moment M leidt tot een drukkracht M/d_v in de bovenstaaf en trekkracht M/d_v in de onderstaaf, een situatie analoog aan wat we hebben gezien in figuur 4.2b.

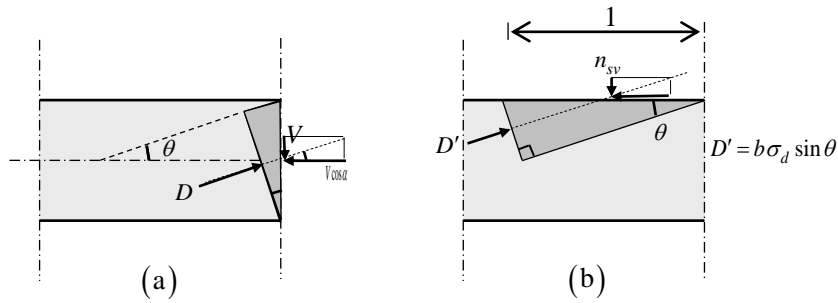


Figuur 4.3. Verfijning van vakwerkmodel uit figuur 4.1.

In de meest rechter figuur tonen we hoe de dwarskracht V wordt opgenomen. De drukdiagonalen maken in de rechter verticale snede evenwicht met een neerwaarts gerichte dwarskracht V en naar links gerichte horizontale drukkracht $V \cot \alpha$. In de linker snede zijn deze richtingen omgekeerd. Aannemend dat de scheidingslijn tussen de drukdiagonalen spanningsloos is, moeten V en de horizontale kracht een resultante hebben die samenvalt met de richting van de diagonalen. Dus is de horizontale kracht $V \cot \alpha$. Vergelijkbaar met wat we in figuur 4.2 voor het vakwerk hebben gezien, moeten er trekkrachten optreden in de boven- en onderstaaf om de totale horizontale kracht in de verticale snede nul te maken. We noemen deze trekkrachten N en de grootte is:

$$N = \frac{1}{2} V \cot \theta \quad (4.1)$$

De spanning in de drukdiagonalen kunnen we berekenen door het evenwicht van de gearceerde driehoek in figuur 4.4a te beschouwen. De breedte van de ligger is b . De verticale zijde in de figuur heeft de lengte d_v . De korte zijde van de rechte hoek is evenwijdig aan de drukdiagonalen en is dus spanningsloos. driehoekzijde in evenwicht met de resultante van V en de horizontale drukkracht $V \cos \alpha$.



Figuur 4.4. (a) Bepaling drukspanning in diagonaal. (b) Bepaling dwarskrachtwapening.

In de lange zijde van de rechte hoek loodrecht op de diagonalen heerst de drukkracht D . De lengte van de zijde is $d_v \cos \theta$ en de kracht D maakt evenwicht met de resultante van V en $V \cos \theta$. Dus geldt $D = V / \sin \theta$. Deze drukkracht werkt op een zijde met de lengte $d_v \cos \theta$. De drukspanning in de diagonalen is dan

$$\sigma_d = \frac{D}{b(d_v \cos \theta)} = \frac{V / \sin \theta}{bd_v \cos \theta} = \frac{V}{bd_v} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (4.2)$$

De term V/bd_v is de nominale schuifspanning. Voor de hoek θ schrijft Eurocode 2 de volgende begrenzing voor:

$$1 \leq \cot \theta \leq 2,5 \quad (4.3)$$

Binnen deze grenzen mag de constructeur kiezen. De ondergrens 1 hoort bij een hoek $\theta = 45$ graden. De drukspanning is dan 2,0 maal de nominale schuifspanning. Bij de bovengrens 2,5 is de hoek $\theta = 24,2$ graden. Dan wordt de drukspanning 2,9 maal de nominale schuifspanning.

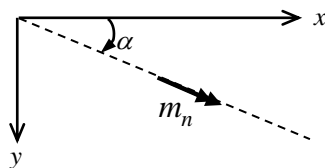
De benodigde dwarskrachtwapening volgt uit het evenwicht van de driehoek in figuur 4.4b. De kracht n_{sv} aan de bovenzijde is de kracht in de dwarskrachtwapening over de eenheid van lengte. Uit het verticaal evenwicht van het driehoekje volgt: $n_{sv} = D' \sin \theta = b \sigma_d \sin^2 \theta$. Met σ_d uit (4.2) levert dit:

$$n_{sv} = \frac{V}{d_v} \tan \theta \quad (4.4)$$

5. Wapenen van platen

5.1 Normale moment vloeicriterium

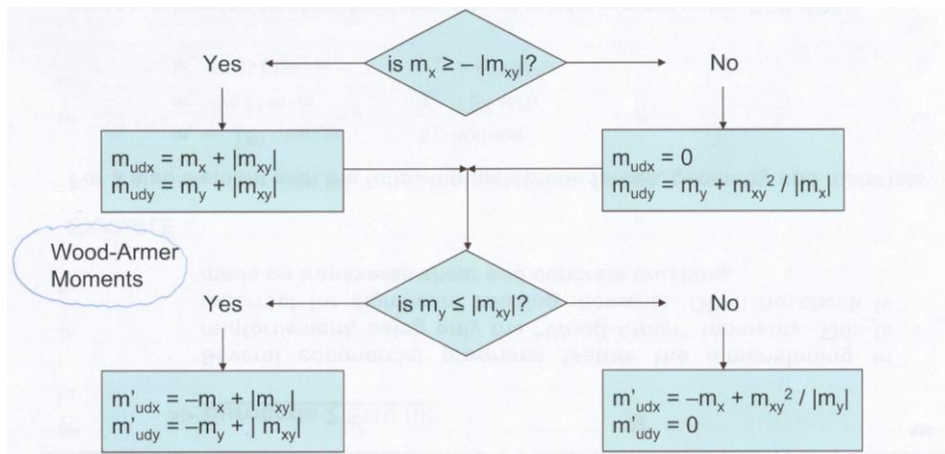
In een plaat treden in het algemeen buigende en wringende momenten en dwarskrachten op. Een internationaal bekende methode om op basis van de momenten te wapenen is het zogenaamde 'normale momenten vloeicriterium'. Beschouw de momenten in een punt van de plaat. Door dat punt trekken we een lijn die een hoek α maakt met de x -as, zie figuur 5.1. Het moment dat als gevolg van de belasting optreedt met spanningen loodrecht op deze lijn noemen we m_n . De capaciteit in deze snede noemen we m_n^* . Het criterium eist $m_n < m_n^*$ voor alle hoeken α tussen 0 en 360 graden. De methode neemt geen dwarskrachten in beschouwing. De methode is niet opgenomen in Eurocode 2 omdat hij onveilig is voor grote wringmomenten en/of hoge wapeningspercentages.



Figuur 5.1. Normale momenten vloeicriterium.

5.2 Wood-Armer momenten

In deze aanpak worden formules gebruikt die herinneren aan het wapenen van schijven. Diverse commerciële programma's maken er gebruik van. We noemen het wapeningsmoment voor de onderlaag in x -richting m_{udx} en voor de bovenlaag m'_{udx} . Evenzo definiëren we m_{udy} en m'_{udy} voor de y -richting. De grootte van deze momenten is in figuur 5.2 aangegeven voor verschillende situaties. Ook deze methode is niet correct voor grote wringmomenten. Als de wapeningsmomenten met deze techniek worden bepaald moet men opletten of er wel een controle wordt toegepast op de dwarskracht en de betondrukspanning.



Figuur 5.2. Wood-Armer momenten (PAO-dictaat 'Schijven en platen, verrassing en valkuil', 2010, Paulo Lourenco).

5.3 Sandwichmodel van Marti

In Eurocode 2, deel 2 (Bruggen) is een methode opgenomen voor het wapenen van schaal-elementen, die is ontwikkeld door Marti [1]. In deze paragraaf leggen we dit model eerst uit voor platen. In hoofdstuk 6 volgt de veralgemenisering naar het schaalement.

Een belangrijke beslissing is of dwarskrachtwapening nodig is of niet. Daartoe bepalen we eerst de grootte v_o van de maximale dwarskracht en de richting φ_o in het x,y -vlak waarin deze optreedt. Uit hoofdstuk 3 nemen we over:

$$\tan \varphi_o = \frac{v_y}{v_x} \quad (5.1)$$
$$v_o = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Volgens Eurocode 2 is dwarskrachtwapening niet nodig als de optredende dwarskracht v_o kleiner is dan of gelijk aan de toegelaten dwarskracht $v_{Rd,c}$:

$$v_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} d \quad (5.2)$$

Voor deze formule geldt een minimum waarde v_{min} . Als ook een normaalkracht aanwezig is, wijzigt de formule in:

$$v_{Rd,c} = \left(C_{Rd,c} k (100 \rho_l)^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \right) d \quad (5.3)$$

In deze formules verdisconteert k het schaaffect:

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0; \quad d \text{ in mm} \quad (5.4)$$

f_{ck} is de kubusdruksterkte en σ_{cp} de drukspanning (positief) ten gevolge van de normaalkracht. Het symbool ρ_l is de wapeningsratio voor de langswapening in de beschouwde doorsnede. Bij platen moeten we de maximale dwarskracht v_o uitrekenen die een hoek φ_o maakt met de x -as. Deze richting valt in het algemeen niet samen met de gekozen orthogonale wapening. We moeten dan een equivalente wapeningsratio ρ_l bepalen uit de ratio ρ_x voor de x -richting en ρ_y voor de y -richting. Dit doen we met de formule:

$$\rho_l = \rho_x \cos^2 \varphi_o + \rho_y \sin^2 \varphi_o \quad (5.5)$$

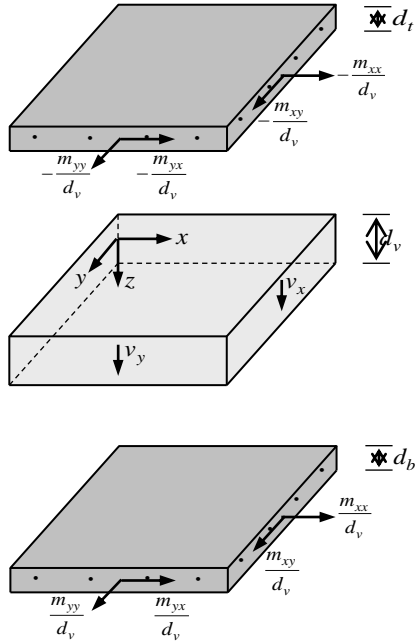
Voor de waarden van $C_{Rd,c}$, v_{min} en k_1 verwijst de Nederlandse Annex van Eurocode 2, deel 2, naar NEN-EN 1992-1-1.

5.3.1 Geen dwarskrachtwapening nodig

We splitsen de plaat in drie componenten zoals we deden voor de ligger in hoofdstuk 4. We onderscheiden een onderschijf, een bovenschijf en een kern, dus een ‘sandwichmodel’, zie figuur 5.3. De onderschijf (bottom, b) ligt aan de positieve z -kant en de bovenschijf (top, t) aan de negatieve kant. De twee schijven worden gedacht alleen in hun vlak te zijn belast; de kern tussen de schijven wordt op afschuiving belast. De dikte van de schijven is respectievelijk d_b en d_t voor bottom en top. Het hart van een schijf ligt midden tussen de twee wapeningsvlakken voor de x - en y -richting. De hart-op-hart afstand van de schijven is d_v . Deze afstand hanteren we als de hoogte van de kern.

We vervangen de buigende momenten door koppels van krachten als aangegeven in fig. 5.3. De normaalkrachten en schuifkrachten die hierdoor worden geïntroduceerd, belasten de

boven- en onderschijf. De wapening in deze twee schijven kan met de voorgaand besproken schijftheorie van hoofdstuk 2 worden gedimensioneerd. De aanpak voor het schijfelement kunnen we blijven toepassen. De normaalkrachten per eenheid van plaatbreedte waarop we moeten wapenen noemen we *wapeningskrachten*. We noemen de wapeningskracht voor de onderlaag in x -richting n_{sxb} en voor de bovenlaag n_{sxt} . Evenzo definiëren we n_{syb} en n_{syt} voor de y -richting. Hierin staat s voor staal, b voor bottom en t voor top en de grootte van de krachten volgt uit (5.6).



Figuur 5.3. Sandwichmodel voor platen.

$$\begin{aligned}
 n_{sxb} &= \frac{m_{xx}}{d_v} + k_b \left| \frac{m_{xy}}{d_v} \right| \\
 n_{syb} &= \frac{m_{yy}}{d_v} + k_b^{-1} \left| \frac{m_{xy}}{d_v} \right| \\
 n_{sxt} &= -\frac{m_{xx}}{d_v} + k_t \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} \right| \\
 n_{syt} &= -\frac{m_{yy}}{d_v} + k_t^{-1} \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} \right|
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

De k -waarde voor bottom en top kunnen in principe verschillend worden gekozen. Evenals bij schijven kan in sommige gevallen worden volstaan met wapening in één richting of kan in het geheel geen wapening nodig zijn. De procedure is dan geheel als in hoofdstuk 2. In de twee schijven treden drukdiagonalen op, waarvan de drukspanning moet worden getoetst aan de formules van par. 2.2. De grootte van de diagonaaldrukkrachten is:

$$n_c = (k + k^{-1}) \left| \frac{m_{xy}}{d_v} \right|$$

waarin k gelijk is aan k_b voor de onderschijf en k_t voor de bovenschijf.

5.3.2 Wel dwarskrachtwapening nodig.

Als uit een controle op dwarskracht blijkt dat dwarskrachtwapening benodigd is, volgen we een werkwijze die al is besproken in hoofdstuk 4 voor liggers. We hebben daar gezien dat we langskrachten moeten toevoegen aan de krachten die in de boven- en onderschijf werkzaam zijn. Deze langskrachten berekenen we met het staafwerkmodel van hoofdstuk 4.

Door het ontstaan van de drukdiagonalen worden in de richting φ_o trekkrachten in de boven- en onderplaat opgeroepen van de grootte $\frac{1}{2}v_o \cot\theta$. Algemeener, in het assenstelsel n,t met oriëntatie φ_o worden aan de buitenste lagen van de sandwich de volgende schijfkrachten toegevoegd:

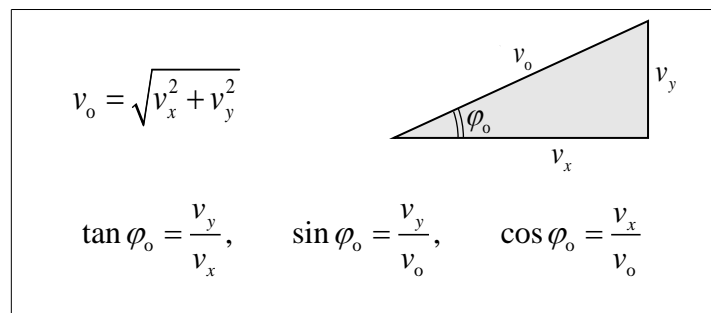
$$\begin{aligned} n_{nn} &= \frac{1}{2}v_o \cot \theta \\ n_{tt} &= 0 \\ n_{nt} &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

We transformeren deze schijfkrachten naar krachten in het x,y -stelsel. In vergelijking (1.1) hebben we de transformatie gezien van het x,y -assenstelsel naar het n,t -stelsel. Als we in die vergelijking de hoek α vervangen door $-\varphi_o$ transformeren we van n,t naar x,y :

$$\begin{aligned} n_{xx} &= n_{nn} \cos^2 \varphi_o - 2n_{nt} \sin \varphi_o \cos \varphi_o + n_{tt} \sin^2 \varphi_o \\ n_{yy} &= n_{nn} \sin^2 \varphi_o + 2n_{nt} \sin \varphi_o \cos \varphi_o + n_{tt} \cos^2 \varphi_o \\ n_{xy} &= \frac{1}{2}(n_{nn} - n_{tt}) \sin 2\varphi_o + n_{nt} \cos 2\varphi_o \end{aligned} \tag{5.8}$$

Omdat n_{nt} en n_{nt} nul zijn, krijgen we:

$$n_{xx} = n_{nn} \cos^2 \varphi_o, \quad n_{yy} = n_{nn} \sin^2 \varphi_o, \quad n_{xy} = n_{nn} \sin \varphi_o \cos \varphi_o \tag{5.9}$$



Figuur 5.4. Bepaling van $\sin \varphi_o$ en $\cos \varphi_o$.

Uit (5.1) weten we $\tan\varphi_o = v_y/v_x$. Uit figuur 5.4 lezen we dan af $\sin\varphi_o = v_y/v_o$ en $\cos\varphi_o = v_x/v_o$. Samen met de relatie $n_{nn} = \frac{1}{2}v_o \cot \theta$ gaat (5.9) dan over in:

$$\begin{aligned}
n_{xx} &= \frac{1/2 v_x^2}{v_o \tan \theta} \\
n_{yy} &= \frac{1/2 v_y^2}{v_o \tan \theta} \\
n_{xy} &= \frac{1/2 v_x v_y}{v_o \tan \theta}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

De formules (5.6) voor de wapeningskrachten worden daarmee uitgebreid tot:

$$\begin{aligned}
n_{sxb} &= \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{1/2 v_x^2}{v_o \tan \theta} + k_b \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{1/2 v_x v_y}{v_o \tan \theta} \right| \\
n_{syb} &= \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{1/2 v_y^2}{v_o \tan \theta} + k_b^{-1} \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{1/2 v_x v_y}{v_o \tan \theta} \right| \\
n_{sxt} &= -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{1/2 v_x^2}{v_o \tan \theta} + k_t \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{1/2 v_x v_y}{v_o \tan \theta} \right| \\
n_{syt} &= -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{1/2 v_y^2}{v_o \tan \theta} + k_t^{-1} \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{1/2 v_x v_y}{v_o \tan \theta} \right|
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Weer kan in sommige gevallen worden volstaan met wapening in één richting of kan in het geheel geen wapening nodig zijn. De procedure is dan geheel als in hoofdstuk 2.

Let op dat nu in drie diagonalen de drukspanning moet worden gecontroleerd, in de onderschijf, de bovenschijf en in de kern waar de diagonaal loopt onder een hoek θ met het middenvlak van de plaat. Voor de drukkracht in de boven- en onderschijf wordt de derde formule in (2.12) gebruikt. De betondrukspanning in de dwarskrachtdiagonalen wordt:

$$\sigma_d = \frac{v_o}{d_v} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \tag{5.12}$$

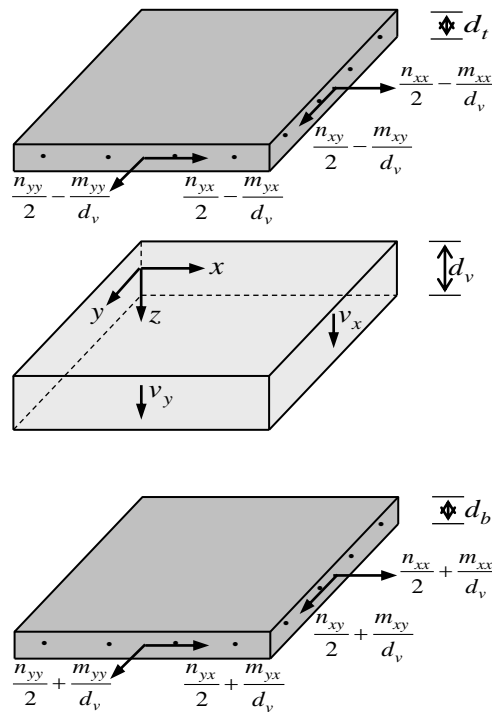
en de benodigde dwarskrachtwapening per eenheid van plaatoppervlak is:

$$n_{sv} = \frac{v_o}{d_v} \tan \theta \tag{5.13}$$

Het drielagenmodel uit Eurocode 2, deel 2 is goed toepasbaar bij niet al te hoge wapeningsverhoudingen en bij niet-dominante wringing [5]. Deze eisen zullen in de constructeurspraktijk veelal niet tot problemen leiden.

6. Wapenen van schalen

De schaal combineert de normaal- en schuifkrachten van de schijf met de buigende en wringende momenten en dwarskrachten van de plaat, zie figuur 6.1. De verschillen met een plaalement zijn beperkt. De boven- en onderschijf van het sandwichmodel nemen ook nu de uitwendige krachten op die als normaal- en schuifkrachten op het geheel worden uitgeoefend. Deze krachten worden weer verdeeld over de twee schijven. De toetsing op dwarskracht vindt plaats als bij een plaat. Dit model uit [1] is opgenomen in Eurocode 2, deel 2 (Bruggen) [2].



Figuur 6.1. Sandwichmodel voor schalen.

6.1 Geen dwarskrachtwapening nodig

Als geen dwarskrachtwapening nodig is, gelden de volgende formules

$$\begin{aligned}
 n_{sxb} &= \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \\
 n_{syb} &= \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \\
 n_{sxt} &= -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \\
 n_{syt} &= -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right|
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Op basis van deze formules wordt de wapening in de onder- en bovenschijf bepaald en vindt de controle plaats op de drukspanning in de diagonalen. Weer kan in sommige gevallen worden volstaan met wapening in één richting of kan in het geheel geen wapening nodig zijn. De procedure is dan geheel als in hoofdstuk 2.

6.2 Wel dwarskrachtwapening nodig

Als dwarskrachtwapening nodig is, zijn de formules:

$$\begin{aligned}
 n_{sxb} &= \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \frac{v_x^2}{2v_o \tan \theta} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_o \tan \theta} \right| \\
 n_{syb} &= \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{v_y^2}{2v_o \tan \theta} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_o \tan \theta} \right| \\
 n_{sxt} &= -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \frac{v_x^2}{2v_o \tan \theta} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_o \tan \theta} \right| \\
 n_{syt} &= -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{v_y^2}{2v_o \tan \theta} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_o \tan \theta} \right|
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

deze waarden moeten worden gebruikt om de drukkrachten in de betonschillen te berekenen

zie formule voor n_c op bldz. 19

Weer kan in sommige gevallen worden volstaan met wapening in één richting of kan in het geheel geen wapening nodig zijn. De procedure is dan geheel als in hoofdstuk 2.

De drukspanning in de diagonalen in de kern wordt nu;

$$\sigma_d = \frac{v_o}{d_v} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}
 \tag{6.3}$$

en de benodigde dwarskrachtwapening per eenheid van plaatoppervlak, analoog aan (4.4):

$$n_{sv} = \frac{v_o}{d_v} \tan \theta
 \tag{6.4}$$

6.3 Opmerkingen bij het Marti-model

In de berekening volgens het sandwichmodel is geen rekening gehouden met het aanbrennen van een minimumwapening in de richtingen waarin theoretisch geen wapening benodigd is. Uiteraard is het mogelijk in de modellen rekening te houden met minimumwapening.

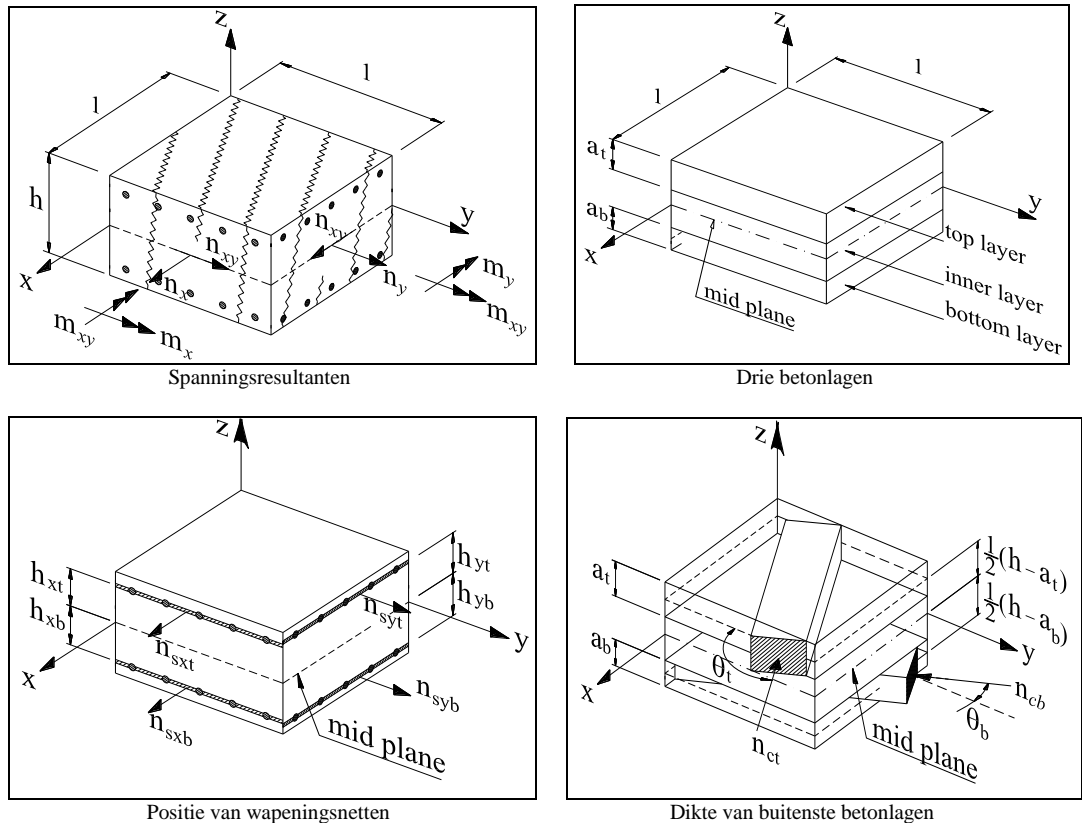
Braam en Blaauwendraad hebben [5] een presentatie op hoofdlijnen gegeven van de in hoofdstuk 5 en 6 behandelde sandwichwapeningstheorie. Dit artikel is nu meer in detail uitgewerkt.

Uit een berekening van element na element volgt een onpraktische wapeningsverdeling. In werkelijkheid zal de constructeur kiezen voor een praktisch net. De gevonden wapeningsverdeling past goed bij de bruikbaarheidstoestand, maar is niet noodzakelijkerwijs de beste voor de bezwijktoestand. Door scheurvorming kan sprake zijn van een substantiële herverdeling in de krachtwerking. In een plaat kan de hefboomsarm groter worden waardoor de bezwijkbelasting groter kan worden dan verwacht.

We merken tenslotte op dat de getoonde algoritmes geen aanwijzingen inhouden voor goede verankeringslengten en het onverzwakt doorvoeren van trekbanden.

6.4 Sandwichmodel van Lourenço

P.B. Lourenço heeft een verfijnd sandwichmodel gepubliceerd [3] op basis van een iteratiemethode. Ook dit model heeft drie betonlagen. Hij past waar nodig de dikte van de onder- en /of bovenplaat automatisch aan als de betondrukspanning te hoog wordt en houdt rekening met verschillende excentriciteiten voor de diverse lagen wapening. Zo wordt de wapening geoptimaliseerd. Lourenço en Blaauwendraad hebben in [4] aan dit model bekendheid gegeven in het Nederlandse taalgebied. Lourenço heeft op basis van zijn theorie een programma RCShell geschreven dat beschikbaar is op de website van de Universiteit van Minho in Portugal. De figuren 6.2 tot en met 6.4 geven weer met welke geometrie in het programma wordt gewerkt.

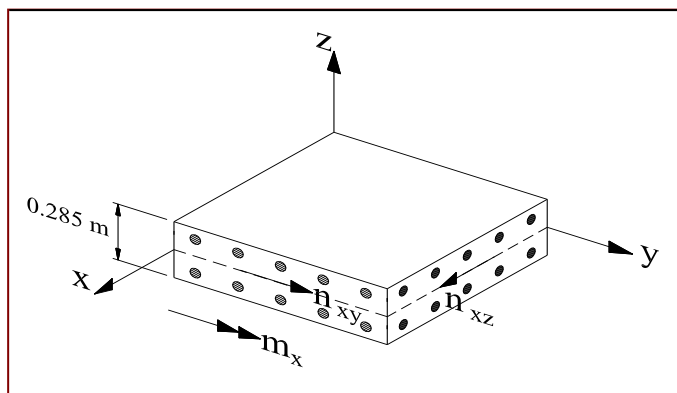


Figuur 6.2. Definities in het verfijnde sandwich model van Lourenço.

Lourenço heeft met twee voorbeelden op elementniveau de waarde van zijn model bewezen. In het eerste voorbeeld ondergaat het element een schaalbelasting bestaande uit een membraanschuifkracht n_{xy} en een buigend moment m_{xx} . Het is een proefstuk uit een serie die is onderzocht door Kirsher en Collins (1986). Fig. 6.3 geeft deze belasting weer. Voor deze belastingcombinatie is een experimentele verificatie beschikbaar.

In het tweede voorbeeld wordt het resultaat van een torsietest van Marti e.a. gebruikt. Het element is belast door een wringend moment m_{xy} , zie figuur 6.4.

6.4.1 Schaalbelasting.



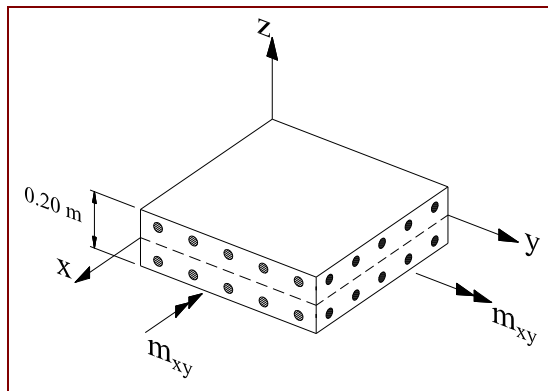
Figuur 6.3

$$\begin{aligned}
 h_{xt} = h_{xb} &= 0.122 \text{ m} & h_{yt} = h_{yb} &= 0.100 \text{ m} \\
 n_{xy} &= 1806 \text{ kN/m} & m_x &= 235 \text{ KNm/m} \\
 f'_c &= 41.8 \text{ MPa} & f_{yx} &= 492 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Uit de serie proefstukken van Kirsher en Collins is SE7 gekozen. In onderstaand overzicht staan de wapeningshoeveelheden die (i) in het experiment zijn gebruikt, (ii) die volgen uit een berekening van Kollegger met behulp van een niet-lineair EEM-programma, (iii) de Marti-methode (simplified) en (iv) de Lourenço-methode (proposed). De verschillen tussen de drie berekeningsmethoden zijn gering. Opvallend is dat alle drie berekeningsmethoden uitwijzen dat de wapening x -top eigenlijk (vrijwel) overbodig is, terwijl daar in het proefstuk veel wapening aanwezig is. Die wapening is kennelijk inactief.

Method	Reinforcement areas (cm^2/m)				
	x – top	y – top	x – bottom	y – bottom	Total
Experimental	41.8	13.9	41.8	13.9	111.4
Kollegger (1991)	5.0	14.1	37.6	16.9	73.6
Simplified sandwich model	0.0	15.7	39.9	18.4	74.0
Proposed method	0.0	16.6	36.8	17.9	71.3

6.4.2 Wringend moment



Figuur 6.4

Concrete : $f'_c = 44.4 \text{ MPa}$

Reinforcement : $f_y = 479 \text{ MPa (ML7)}$

$f_y = 412 \text{ MPa (ML9)}$

Ultimate load : $m_{xy} = 42.5 \text{ kN.m/m (ML7)}$

$m_{xy} = 101.5 \text{ kN.m/m (ML9)}$

Uit de testserie van Marti e.a. zijn twee proefstukken gekozen, een met een laag wapeningspercentage (proefstuk ML7 - 0,25%) en een met een hoog percentage (ML9 – 1,0%). Daarbij horen wapeningsdoorsneden respectievelijk 5,0 en 20,0 cm^2/m . In onderstaand overzicht staan de wapeningshoeveelheden die volgen met het Lourenço-model (proposed) en het Marti-model (simplified).

Voor het lage wapeningspercentage doet Lourenço het perfect, Marti berekent 13% teveel wapening en de methode die Eurocode 2 aan geeft 3% teveel wapening. De methoden zijn alle veilig.

Voor het hoge wapeningspercentage vindt Lourenço 3% te weinig wapening en Marti 19%. De methode van Eurocode 2 leidt tot 23% te weinig wapening, terwijl de wapening in de x- en y-richting ten onrechte verschillen. Voor het hoge wapeningspercentage zijn de Marti-methode en de Eurocode-methode onveilig.

Test	Reinforcement areas (cm^2/m)			
	Experimental	Proposed method	Simplified sandwich model	EC2 method
ML7	5.0 (0.25%)	5.0	5.65	$A_{sx} = 5.0, A_{sy} = 5.3$
ML9	20.0 (1.0%)	19.4	16.2	$A_{sx} = 14.6, A_{sy} = 16.3$

7. Referenties

1. Marti, P.: Design of concrete slabs for transverse shear. ACI Structural Journal, vol. 87, no 2, 1910, pp. 180-190.
2. NEN-EN 1992-2: Eurocode 2, deel 2: Ontwerp en berekening van betonconstructies – Bruggen.
3. Lourenço, P.B., Figueras, J.A.: Automatic design of reinforcement in concrete plates and shells, Engineering Computations, Vol. 10(6), pp 519-541, 1993:
4. Lourenco, P.B en Blaauwendraad, J.: Aanzet tot consistent wapenen van schijven, platen en schalen, I en II.Cement 1995/2 en Cement 1995/3.
5. Braam, R. en Blaauwendraad, J.: Van spanning naar wapening. Cement 2014/3.